

# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

### Semana 7

1. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}, \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

que verifica a condição inicial  $y(1) = -1$  e indique o intervalo máximo de definição da solução.

**Sugestão:** Considere a mudança de variável  $v = y/t$ .

2. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \quad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma  $\mu = \mu(y)$  e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por  $\Phi(x, y) = C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y} \log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial  $y(1) = \sqrt{2}$ .

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante  $\mu = \mu(y)$ .

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial  $y(1) = 1$ .

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

5. a) Determine em que condições uma equação da forma

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de  $t$ , isto é, da forma  $\mu(t)$ , para uma certa função real de variável real  $\mu$ , e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por  $\mu$ .

b) Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \sin(t) + x' = 0 \quad (2)$$

Mostre que a equação não é exacta. Use o resultado da alínea (a) para determinar a solução da equação (2) que satisfaz a condição inicial  $x(\pi) = 1$ . Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

6. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3)$$

- a) Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ .
- b) Mostre que a solução de (3) com condição inicial  $y(-1) = 1$  é dada implicitamente pela expressão  $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$ .
- c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto  $-1$ , da solução dada implicitamente na alínea anterior.